Corrigé du baccalauréat S
Antilles-Guyane 19 juin 2012

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A : étude de fonction

1. Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations sur les limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Par opérations usuelles sur les dérivées :
$$f'(x) = 1\mathrm{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}.$$
4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :
$$y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1.$$
2. Soit $a > 0$, alors :
$$\begin{aligned} \mathrm{O}(0\,;\,0) \in \mathrm{T}_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$
3. - 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
   - Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
     Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:
$$g'(x) = -2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}.$$
     $x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et par ailleurs $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
     Par ailleurs $\displaystyle\lim_{x\to0} g(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
     On sait que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et s'annule en 1.
     Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.
     Conclusion : sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.
4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

Partie C : calcul d'aire

1. Voir annexe 1.
2. Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \\ v(x) & = & x \end{array}\right.$, et $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \\ v'(x) & = & 1 \end{array}\right.$.

   Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0~;~1]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0~;~1]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc, et :

$$\mathrm{I} = \left[x\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1 - \left[\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1 = (1-0) - \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

3. Sur $[0~;~1]$ $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ, donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine considéré est :

$$\begin{array}{lcl} \mathscr{A} & = & \displaystyle\int_0^1 \left(f(x)-2x\right)\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \left(x\mathrm{e}^{x-1}+1-2x\right)\mathrm{d}x \\ & = & \mathrm{I} + \displaystyle\int_0^1 (1-2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité)} \\ & = & \mathrm{I} + \left[x-x^2\right]_0^1 \\ & = & \dfrac{1}{\mathrm{e}} + (1-1) \end{array}$$

   Finalement : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (en unités d'aire).

EXERCICE 2 **4 points**

1. Voir figure sur l'annexe 2.
2. On a :
$$\frac{b}{a} = \frac{-2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}} = \frac{(-2-\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} = \frac{2+4\mathrm{i}+\mathrm{i}-2}{5} = \mathrm{i}.$$
   On en déduit :
   - $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \left|\dfrac{b-0}{a-0}\right| = |\mathrm{i}| = 1$, d'où $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$;
   - $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}~;~\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \arg\left(\dfrac{b-0}{a-0}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

   Les deux points précédents permettent de conclure que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.
3. **a.** L'affixe de C′ est : $c' = \dfrac{-3+\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}+2+\mathrm{i}} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ (calcul fait plus haut).

   b. On a :
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M} \in \mathscr{E} & \iff & z \neq b \text{ et } \left|z'\right| = 1 \\ & \iff & z \neq b \text{ et } \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1 \\ & \iff & \mathrm{M} \neq \mathrm{B} \text{ et } \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = 1 \end{array}$$

   L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc la médiatrice du segment [AB].

   c. $\mathrm{C} \in \mathscr{E}$ car $c' = i$, donc $\left|c'\right| = 1$.

   De même $\mathrm{O} \in \mathscr{E}$ car OA = OB (le triangle OAB est isocèle en O). La médiatrice $\mathscr{E}$ n'est donc rien d 'autre que la droite (OC).
4. • La rotation r a pour écriture complexe $z' = -\mathrm{i}z$, on en déduit que J a pour affixe $j = -\mathrm{i}a = 2+\mathrm{i}$.

- La rotation r' a pour écriture complexe $z' = \mathrm{i}z$, on en déduit que K a pour affixe $k = \mathrm{i}c = -1 - 3\mathrm{i}$.
- L est milieu de [KJ] donc L a pour affixe $\ell = \dfrac{k+j}{2} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}$.
- La médiane issue de O du triangle OJK est la droite (OL) et on a $\overrightarrow{\mathrm{OL}}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -1\right)$.

  On a également $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-2\ ;\ -1)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -2 \times \dfrac{1}{2} + (-1) \times (-1) = 0$. Ainsi (OL) $\perp$ (AC), ce qui prouve que la droite (OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3 **5 points**

1. - $u_2 = \dfrac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \dfrac{1}{2}$
   - $u_3 = \dfrac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$
   - $u_4 = \dfrac{3+1}{2 \times 3} u_3 = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$

2. **a.** Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$.
   - **Initialisation.** $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.
   - **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul on a $u_k > 0$, alors, comme $\dfrac{k+1}{2k} > 0$, on a $\dfrac{k+1}{2k} u_k > 0$, c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$, et la propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** Pour tout entier naturel n non nul : $u_n > 0$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n+1}{n+n} \leqslant 1$. Comme $u_n > 0$ on en déduit que $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc que la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0), elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n} u_n = \dfrac{1}{2} v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}$.

   b. Par propriété des suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \dfrac{1}{2^n}$, on en déduit, comme $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, que $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

4. **a.** On peut écrire, pour tout réel $x \in [1\ ;\ +\infty[$: $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \ln 2\right)$. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées), donc, par opérations sur les limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\ln u_n = \ln\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = \ln n - \ln(2^n) = \ln n - n \ln 2 = f(n)$.
   On en déduit que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$, puis, par application de la fonction exponentielle et de la limite d'une composée : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

   Remarque. On aurait pu déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) dès la question 2 c. En effet la relation $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ell = \dfrac{1}{2}\ell$ et donc que $\ell = 0$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $11 \times 4 - 5 \times 6 = 44 - 30 = 14$, donc le couple $(4\,;\,6)$ est solution de (E).

b. • Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E), alors $11x - 5y = 14 = 11 \times 4 - 5 \times 6$, donc :

$$11(x-4) = 5(y-6) \qquad \text{(E')}$$

5 divise $11(x-4)$ et PGCD$(5\,,\,11) = 1$, donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x-4$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 4 = 5k$. En remplaçant dans (E') $x-5$ par $5k$ on a alors, après simplification par 5 : $11k = y - 6$, ce qui donne finalement
$(x\,;\,y) = (4+5k\,;\,6+11k)$.

• Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les couples $(4+5k\,;\,6+11k)$ sont solutions de (E) car :

$$11(4+5k) - 5(6+11k) = 44 + 55k - 30 - 55k = 14.$$

• Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est
$\left\{(4+5k\,;\,6+11k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. **a.** $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1\ (7)$ donc $2^3 \equiv 1\ (7)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n\ (7)$, c'est-à-dire : $2^{3n} \equiv 1\ (7)$.

b. $2011 = 287 \times 7 + 2$, donc $2011 \equiv 2\ (7)$, par conséquent : $2011^{2012} \equiv 2^{2012}\ (7)$.
Par ailleurs $2012 = 3 \times 670 + 2$, donc :

$$\begin{aligned} 2011^{2012} &\equiv 2^{2012}\ (7) \\ &\equiv 2^{3\times 670+2}\ (7) \\ &\equiv 2^{3\times 670} \times 2^2\ (7) \\ &\equiv 1 \times 4\ (7) \\ &\equiv 4\ (7) \end{aligned}$$

et comme $0 \leqslant 4 < 7$, on peut conclure que le reste dans la division euclidienne de 2011^{2012} par 7 est égal à 4.

3. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \dfrac{3}{2}(1-\text{i}) \in \mathbb{C}^*$ et $b = 4 - 2\text{i} \in \mathbb{C}$. Il s'agit donc d'une similitude directe. Notons k son rapport, α son angle et Ω d'affixe ω son centre. Alors :

• $k = |a| = \left|\dfrac{3}{2}(1-\text{i})\right| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$;

• $\alpha = \arg(a) = \arg\left(\dfrac{3}{2}\right) + \arg(1-\text{i}) = 0 - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$ (modulo 2π) ;

• ω est donné par :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{b}{1-a} \\ &= \frac{4-2\text{i}}{1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\text{i}} \\ &= \frac{4-2\text{i}}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\text{i}} \\ &= \frac{8-4\text{i}}{-1+3\text{i}} \\ &= \frac{(8-4\text{i})(-1-3\text{i})}{(-1)^2+(-3)^2} \\ &= \frac{-8-24\text{i}+4\text{i}-12}{10} \\ &= -2-2\text{i}. \end{aligned}$$

4. Avec A = 12, la boucle « tant que » de l'algorithme est répétée 3 fois (car $\sqrt{12} \simeq 3,4$) :

N	A/N	Ent(A/N)	$A/N - \text{Ent}(A/N) \stackrel{?}{=} 0$	Affichage
1	12	12	oui	N=1 A/N=12
2	6	6	oui	N=2 A/N=6
3	4	4	oui	N=3 A/N=4

Le test « si $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$ » sert en fait à détecter si la division de A par N « tombe juste », c'est-à-dire si N divise A. Si c'est le cas on affiche N et $\frac{A}{N}$ qui sont alors tous deux des diviseurs de A avec $N \leqslant \sqrt{A}$ et $\frac{A}{N} \geqslant \sqrt{A}$.

Au final cet algorithme permet donc d'afficher **tous les diviseurs de** A.

EXERCICE 4 — 5 points

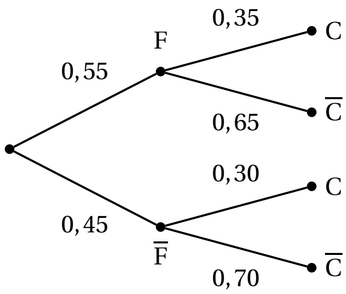
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Notons :
- F l'évènement « l'élève choisi est une fille » ;
- C l'évènement « l'élève choisi déjeune à la cantine ».

D'après l'énoncé :

$$p(\text{F}) = 0,55 \qquad p_{\text{F}}(\text{C}) = 0,35 \qquad p_{\overline{\text{F}}}(\text{C}) = 0,30.$$

On peut dresser l'arbre suivant :



On a alors :

$$p\left(\overline{\text{C}}\right) = 1 - p(\text{C}) = 1 - (0,55 \times 0,35 + 0,45 \times 0,30) = 0,672\,5.$$

2. Il s'agit de tirages simultanés, le nombre total de tirages de 3 jetons parmi 10 est donc de $\binom{10}{3} = 120$. Parmi ces 120 tirages, il y a $\binom{5}{3} = 10$ tirages où les trois numéros sont impairs. Le nombre de tirages avec au moins un jeton à numéro pair est donc égal à $120 - 10 = 110$.

3. Y suit la loi $\mathscr{B}\left(20\,,\,\frac{1}{5}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}
p(\text{Y} \geqslant 2) &= 1 - p\left(\overline{\text{Y} < 2}\right) \\
&= 1 - \left[p(\text{Y} = 0) + p(\text{Y} = 1)\right] \\
&= 1 - \left[\binom{20}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{20} + \binom{20}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{19}\right] \\
&= 1 - \left[\frac{4^{20} + 20 \times 4^{19}}{5^{20}}\right] \\
&\simeq 0,931 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}
\end{aligned}$$

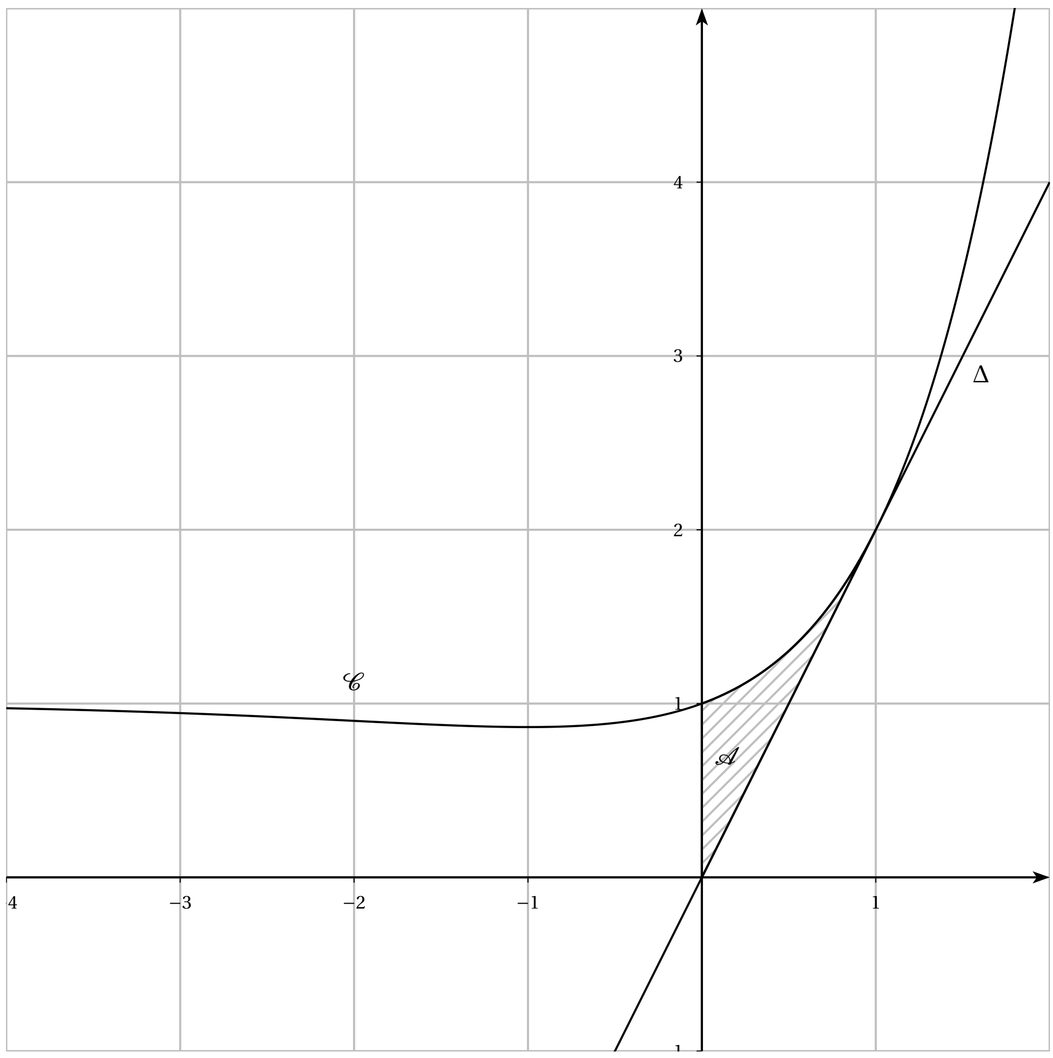
4. L'évènement « l'appareil présente au moins l'un des deux défauts » est l'évènement $\text{A} \cup \text{F}$.

On a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{F}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{F})$, et comme A et F sont indépendants, cela donne : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{F}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{A})p(\mathrm{F})$ d'où l'équation :

$$\begin{aligned}
0,069 = 0,02 + p(\mathrm{F}) - 0,02p(\mathrm{F}) &\iff 0,049 = 0,98p(\mathrm{F})\\
&\iff p(\mathrm{F}) = \frac{0,049}{0,98}\\
&\iff p(\mathrm{F}) = 0,05.
\end{aligned}$$

5. L'algorithme affiche le nombre de fois où le tirage aléatoire d'un numéro entre 1 et 7 donne un résultat strictement supérieur à 5 lors de 9 tirages. On peut assimiler ces 9 tirages indépendants à un schéma de Bernoulli où l'évènement « succès » est « le numéro obtenu est strictement supérieur à 5 », alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = \frac{2}{7}$ (probabilité qu'un nombre entier entre 1 et 7 soit strictement supérieur à 5).

ANNEXE 1
Exercice 1



ANNEXE 2
Exercice 2